Γραμμική Άλγεβρα 1 22/10/15

Υπενθύμιση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$. Ορίζουμε τον ανάστροφο $A^t \in F^{\mu \cdot \nu}$ ως εξής. Το (i,j)-στοιχείο του A^t είναι ίσο με το (j,i)-στοιχείο του A. Λέμε ότι $A \in F^{\nu \cdot \nu}$ συμμετρικός αν $A = A^t$. Για παράδειγμα, κάθε διαγώνιος πίνακας $D \in F^{\nu \cdot \nu}$ είναι συμμετρικός.

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \nu}$ αντιστρέψιμος. Τότε και ο A^t είναι ο αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Απόδειξη

Έχουμε $A \cdot A^{-1} = I_\nu$ και $A^{-1} A = I_\nu$. Επομένως $A \cdot A^{-1} = I_\nu \Rightarrow$

$(A \cdot A^{-1})^t = I_\nu^t \Rightarrow (A^{-1})^t \cdot A^t = I_\nu$ (1)

και $A^{-1} A = I_\nu \Rightarrow (A^{-1} A)^t = I_\nu^t \Rightarrow A^t \cdot (A^{-1})^t = I_\nu$ (2)

Από το 1 και 2 $\Rightarrow$ συμπεραίνουμε

$/ (B \cdot C)^t = C^t B^t$

$I_\nu^{\nu} = I_\nu$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Παράδειγμα ($F=\mathbb{R}$) $\begin{cases} x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases}$

"Λύση γραμμικού συστήματος"

1ο. Να αποφανθούμε αν έχει λύση ή είναι αδύνατο. Ορ. $x=\mathbb{R}$.

2ο. Αν έχει λύση να τις βρούμε όλες!

Επίσης το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Έστω F σώμα. Ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους $x_1 \dots x_\mu$ είναι το εξής:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1\mu}x_\mu &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2\mu}x_\mu &= b_2 \\ \alpha_{\nu 1}x_1+\alpha_{\nu 2}x_2+\dots+\alpha_{\nu\mu}x_\mu &= b_\nu \end{aligned}\right\} \text{με } \alpha_{ij}, b_k \in F \quad (\Sigma)$$

Τα α_{ij} συντελεστές του (Σ), τα b_k σταθεροί όροι.

Ορίζουμε πίνακα του συστήματος (Σ) τον $\nu\cdot\mu$ πίνακα
$A=(\alpha_{ij}) \in F^{\nu\times\mu}$

Ορίζουμε επαυξημένο πίνακα του (Σ) τον $\nu\times(\mu+1)$ πίνακα $(A|b)$

όπου $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{pmatrix}$ Προσθέτουμε στον A μια στήλη με το b

Παράδειγμα

1) $F=\mathbb{R}$ $\quad 1\cdot x_1+2\cdot x_2+3x_3+4x_4=5$ $\quad (\Sigma)$

Πίνακας του συστήματος $A=(1,2,3,4)\in\mathbb{R}^{1\times 4}$

Επαυξημένος πίνακας $B=(A|b)=(1\,2\,3\,4\,5)\in\mathbb{R}^{1\times 5}$

2) Αν $(\Sigma)\begin{cases}0x_1+3x_2=0\\0x_1+6x_2=0\end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix}0&3\\0&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad B=(A|b)=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&6&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$

Επομένως το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στην εξίσωση πινάκων $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_\mu\end{pmatrix}=b$ όπου $A=(a_{ij})\in F^{\nu\times\mu}$ και $b=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_\nu\end{pmatrix}\in F^{\nu\times 1}$

Ορισμός: Ένα στοιχείο $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_\mu\end{pmatrix}$ λέγεται λύση του (Σ) αν

$A\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_\mu\end{pmatrix}=b$

Παράδειγμα

$F=\mathbb{R}$ $\quad 1x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5$ $\quad (\Sigma)$

Το $\xi\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 1}$ είναι λύση του (Σ) ενώ το $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ δεν είναι,

γιατί $2+2\neq 5$ στο $\mathbb{R}$

Από σύμβαση σε αυτό το μάθημα. Λύση γραμμικού συστήματος είναι πίνακας στήλη

Ορισμός: Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν $b_1=b_2=\dots=b_\nu=0_F$ δηλαδή σε επίπεδο πινάκων η εξίσωση είναι $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_\mu\end{pmatrix}=\Theta_{\nu\times 1}$

Ορισμός: Το σύστημα (Σ) λέγεται ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ αν έχει μια τουλάχιστον λύση. Αλλιώς λέγεται ΑΔΥΝΑΤΟ!
(π.χ. Το σύστημα $3x_1+3x_2=6$ είναι συμβιβαστό, μια λύση π.χ. είναι η $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Το σύστημα $0x_1+0x_2=2015$ είναι αδύνατο.

Παρατήρηση

Κάθε ομογενές σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\mu\end{pmatrix}=0_{\nu\times 1}$ είναι συμβιβαστό, γιατί το $\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\in F^{\mu\times 1}$ είναι πάντα λύση, που λέγεται τετριμμένη λύση.

Ορισμός

Έστω (Σ) γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους και (Σ') γραμμικό σύστημα ν' εξισώσεων με μ' αγνώστους. Τα (Σ) και (Σ') λέγονται ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ αν $\mu=\mu'$ (δηλ. ίδιο πλήθος αγνώστων) και έχουν τα ίδια σύνολα λύσεων στο $F^{\mu\times 1}$ (Παρατήρηση: μπορεί $\nu\neq\nu'$, κανένα πρόβλημα)

π.χ. (Σ) $\begin{cases}3x_1+4x_2=9\\ 6x_1+8x_2=18\end{cases}$ (Σ'): $3x_1+4x_2=9$

Προφανώς (Σ) και (Σ') είναι ισοδύναμα.

Αν $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ λύση του (Σ) $\Rightarrow 3\xi_1+4\xi_2=9 \Rightarrow \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ λύση του Σ'

Αντίστροφα αν $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ λύση του (Σ') $\Rightarrow 3\xi_1+4\xi_2=9$ άρα και πολλαπλασιάζοντας επί 2, $6\xi_1+8\xi_2=18$, άρα $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ λύση του (Σ).

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ x+4y=2 \end{cases}$$

Ορισμός (ΓΡΑΜΜΟΠΡΑΞΕΙΣ)

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in F^{\nu \times \mu}$. Συμβολίζουμε τις γραμμές του με $r_1, r_2 \dots r_\nu$. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες γραμμοπράξεων.

i) $r_i \mapsto \lambda r_i$, όπου $i \in \{1,2,\dots \nu\}$, $\lambda \in F \setminus \{0\}$ όπου $A \setminus B = A - B$

Τι κάνουμε; Πολλαπλασιάζουμε την i-γραμμή του A με λ.

Παράδειγμα:

$F=\mathbb{R}$ $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $i=2$, $\lambda=\frac{1}{3}$

$A \xrightarrow{r_2 \mapsto \lambda r_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$

ii) $r_i \to r_i + \lambda r_j$ όπου $i,j \in \{1 \dots \nu\}$, $i \neq j$, $\lambda \in F$

Τι κάνουμε; Προσθέτουμε στην i-γραμμή του A λ-φορές την j-γραμμή του A.

iii) $r_i \leftrightarrow r_j$ όπου $i,j \in \{1,2 \dots \nu\}$ με $i \neq j$

Τι κάνουμε; Μεταθέτουμε τις i και j γραμμές του A.

Τα i, ii, iii λέγονται γραμμοπράξεις (ή στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών)

Ορισμός

-Έστω $A, B \in F^{\nu \times \mu}$. Λέμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B, αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A με μια πεπερασμένη ακολουθία γραμμοπράξεων.

Δηλ. αν έχουμε πεπερασμένη ακολουθία

$$A \xrightarrow[1]{\text{γραμμοπράξη}} A_1 \xrightarrow{\text{2η γραμμοπράξη}} A_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\text{τελευταία γραμμοπράξη}} B$$